ΘΕΩΡΗΜΑ (Rodrigues) Έστω S κανονική επιφάνεια και $c: I \subset \mathbb{R} \to S$ κανονική καμπύλη. Η c καμπύλη καμπυλότητας αν.ν $(N \circ c)'(t) = \lambda(t) \cdot c'(t)$ όπου $\lambda: I \to \mathbb{R}$ λεία

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $(N \circ c)'(t) = \lambda(t) \cdot c'(t) \overset{①}{\Longleftrightarrow} -L_{c(t)}(c'(t)) = \lambda(t) c'(t) \Longleftrightarrow$

$\Rightarrow L_{c(t)}(c'(t)) = -\lambda(t) \cdot c'(t) \quad \forall t \in I \Rightarrow$ Η c καμπύλη καμπυλότητας

① $L_{c(t)}(c'(t)) = -dN_{c(t)}(c'(t)) = -(N \circ c)'(t)$. ①

όπου $L_{c(t)}: T_{c(t)} S \to T_{c(t)} S$, $L_{c(t)} = -dN_{c(t)}$

$N: S \to S^2$ απεικόνιση Gauss

Άσκηση 1:

Έστω S επιφάνεια γράφημα της $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ τύπου $h(x,y) = x^2 + \frac{1}{2} y^2$. (1) Ν.δ.ο τα $w_1 = (0,1,0)$, $w_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ εφάπτονται της S στο $P_0(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}) \in S$. (2) Να βρείτε τις εικόνες τους μέσω της απεικόνισης Weingarten

ΛΥΣΗ

i) Θεωρώ σύστ. συντ/νων $X: \mathbb{R}^2 \to S$, $\bar{X}(x,y) = (x, y, x^2 + \frac{1}{2} y^2)$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{X}_x(x,y) = (1,0,2x) \\ X_y(x,y) = (0,1,y) \end{array}\right\} \{X_x(x,y), X_y(x,y)\} \text{ βάση του } T_{P_0} S$$

Έτσι, $X_x(\frac{1}{2}, 0) = (1,0,1)$ και $X_y(\frac{1}{2}, 0) = (0,1,0)$

$w_1 = X_y(\frac{1}{2}, 0) \in T_{P_0} S$, $w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} X_x(\frac{1}{2}, 0) \in T_{P_0} S$

ii) Για το w_1 (όμοια για το w_2):

$L_{P_0} w_1 = L_{P_0} X_y(\frac{1}{2}, 0) = -(N \circ X)_y(\frac{1}{2}, 0)$

$$N \circ X = \frac{X_x \times X_y}{\|X_x \times X_y\|} = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+y^2}} (-2x, -y, 1) \Rightarrow N_y = \dots$$

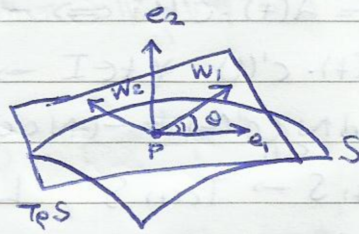
$N_y(\frac{1}{2}, 0) = \dots$

Άσκηση 2η:

ΝΔΟ το άθροισμα των καθέτων καμπυλοτήτων σε σημείο p κανονικής επιφάνειας S και ως προς διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους είναι ίσο με $2H(p)$.

ΛΥΣΗ

$$K_n(w) = \frac{II_p(w)}{I_p(w)}$$



Τύπος Euler

$K_n(w_1) = k_1(p)\cdot\cos^2\theta + k_2(p)\sin^2\theta$ με

$w = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2$ με $\{e_1, e_2\}$ οι κύριες διευθύνσεις στο 1.

$K_n(w_2) = k_1(p)\cos^2(\theta+\frac{\pi}{2}) + k_2(p)\sin^2(\theta+\pi/2)$ με

$w_2 = \cos(\theta+\frac{\pi}{2})e_1 + \sin(\theta+\frac{\pi}{2}) = -\sin\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_2$

Έτσι,

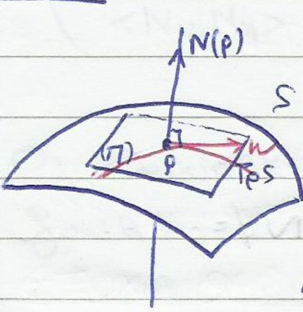
$K_n(w_1) + K_n(w_2) = k_1(p) + k_2(p) = 2H(p)$

Άσκηση 3

Έστω S συνεκτική κανονική επιφάνεια.

ΝΔΟ αν όλες οι κάθετες ευθείες περνάνε από κοινό σημείο τότε η $S \underset{\text{ανοιχτό}}{\subset} S^2$.

ΛΥΣΗ



Έστω p_0 το κοινό σημείο όλων των καθέτων. Η παραμετρική παράσταση της ευθείας στο p είναι:

$p + \lambda N(p)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Από υπόθεση $\forall p \in S$, $\exists \lambda(p) \in \mathbb{R}$ ώστε

(*) $p + \lambda(p) N(p) = p_0$ σταθ.

Θεωρώ τη διανυσμ. συναρτ. $f: S \to \mathbb{R}^3$ ε/ω

$F(p) = p + \lambda(p) N(p)$

(*) $\langle p, N(p)\rangle + \lambda(p) = \langle p_0, N(p)\rangle$ είναι λεία

$w \in T_pS$

- Άρα, $F: S \to \mathbb{R}^3$ λεία και σταθερή $\Rightarrow dF_p = 0$

Έστω τώρα $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ με $c(0) = p$ και $c'(0) = w$

$dF_{p_0}(w) = (F \circ c)'(0)$, $\quad F \circ c(t) = F(c(t)) = c(t) + \lambda(c(t))\, N(c(t))$

$(F \circ c)'(0) = c'(0) + (\lambda \circ c)'(0) \cdot N(c(0)) + \lambda(c(0))\, (N \circ c)'(0) =$

$= w + d\lambda_p(w)\, N(p) + \lambda(p)\, dN_p(w).$

$$\left.\begin{array}{l} dF_p(w) = w + d\lambda_p(w)\, N(p) - \lambda(p)\, L_p w \\ F = \sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow dF_p(w) = 0 \quad \forall w \end{array}\right\} \Rightarrow (\forall w \in T_pS): \underbrace{(w - \lambda(p) L_p w)}_{\in T_pS} + \underbrace{d\lambda_p(w) N(p)}_{\perp T_pS} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{w - \lambda(p) L_p w = 0}$ και $\underline{d\lambda_p(w) = 0}$ $\forall w \in T_pS$.

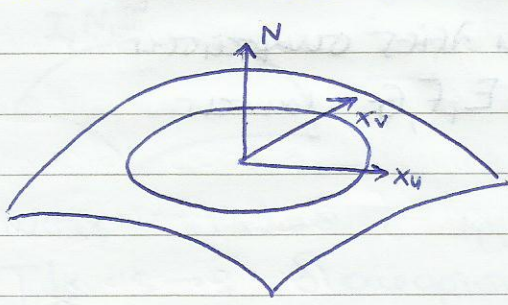
$\Rightarrow d\lambda_p = 0$, $\forall p \overset{\text{συνεκτ.}}{\Rightarrow} \lambda = \sigma\tau\alpha\theta$ και $L_p w = \frac{1}{\lambda} w \quad \forall w \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Όλα τα σημεία της επιφάνειας είναι ομφαλικά

$\|p - p_0\| = \|-\lambda N(p)\| \Rightarrow d(p, p_0) = |\lambda|$ σφαίρα.

ΝΕΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ (ΤΑΝΥΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ)

Έστω S κανονική επιφάνεια. Έστω σύστημα συντ/νων

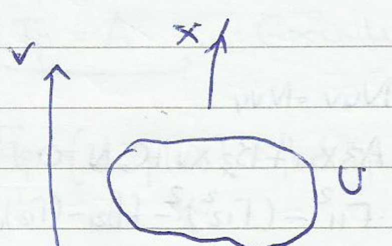


$x: U \to S$ με $(u,v) \in U$ παραμετρ.

$E = \|x_u\|^2$, $F = \langle x_u, x_v \rangle$, $G = \|x_v\|^2$

Έτσι, παράγαμε το πλαίσιο $\{x_u, x_v, N\}$

Διαφορίζοντας θα δούμε πως μεταβάλλεται $(u \to 1,\ v \to 2)$



$$(*)\left\{\begin{array}{l} x_{uu} = \Gamma_{11}^1 x_u + \Gamma_{11}^2 x_v + L_{11} N \\ x_{uv} = \Gamma_{12}^1 x_u + \Gamma_{12}^2 x_v + L_{12} N \\ x_{vu} = \Gamma_{21}^1 x_u + \Gamma_{21}^2 x_v + L_{21} N \\ x_{vv} = \Gamma_{22}^1 x_u + \Gamma_{22}^2 x_v + L_{22} N \\ N_u = b_{11} x_u + b_{21} x_v \\ N_v = b_{12} x_u + b_{22} x_v \end{array}\right.$$

όπου $L_{11} = \langle x_{uu}, N \rangle = e$

$L_{12} = \langle x_{uv}, N \rangle = f$

$L_{21} = \langle x_{vu}, N \rangle = f$

$L_{22} = \langle x_{vv}, N \rangle = g$

$-Lx_u = N_u$ και $-Lx_v = N_v$

όπου $(b_{ij}) = -(a_{ij}) =$

$= -\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$

Οι συναρτήσεις $\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$ καλούνται σύμβολα christoffel. $X_{uv} = X_{vu} \Rightarrow \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$

<u>ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ Γ_{ij}^k</u>

$$\begin{cases} E\,\Gamma_{11}^1 + F\,\Gamma_{11}^2 = \langle X_{uu}, X_u \rangle & (1) \\ F\,\Gamma_{11}^1 + G\,\Gamma_{11}^2 = \langle X_{uu}, X_v \rangle & (2) \end{cases}$$

(1) $\langle X_{uu}, X_u \rangle = \frac{1}{2} \langle X_u, X_u \rangle_u = \frac{1}{2} E_u$

(2) $\langle X_{uu}, X_v \rangle = \langle X_u, X_v \rangle_u - \langle X_u, X_{uv} \rangle =$
$= F_u - \frac{1}{2} \langle X_u, X_u \rangle_v = F_u - \frac{1}{2} E_v$

ομοίως και για τα υπόλοιπα

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>

Τα σύμβολα christoffel είναι λείες συναρτήσεις και εξαρτώνται μόνο από τα E, F, G και τις παραγώγους πρώτης τάξης
(Αποδεικνύεται παραπάνω)

Για να έχει λύση η (*) πρέπει:
$(X_{uu})_v = (X_{vu})_u$, $(X_{vv})_u = (X_{uv})_v$, $N_{uv} = N_{vu}$
$A_1 X_u + B_1 X_v + C_1 N = 0$, $A_2 X_u + B_2 X_v + C_2 N = 0$, $A_3 X_u + B_3 X_v + C_3 N = 0$
$B_1 = \Gamma_{11}^1 \cdot \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^2 + e b_{22} + (\Gamma_{11}^2)_v - \Gamma_{12}^1 \cdot \Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2 - f b_{21} - (\Gamma_{12}^1)_u = 0$
$\Leftrightarrow$

$$\Gamma_{12}^1 - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \cdot \Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^1 \cdot \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \cdot \Gamma_{22}^2 = -E \frac{eg - f}{EG - F} = -E \cdot K$$

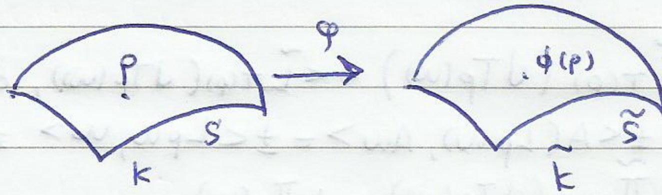
↳ Εξίσωση Gauss

<u>ΕΞΟΧΟ ΘΕΩΡΗΜΑ</u>

Για να είναι δύο επιφάνειες ισομετρικές πρέπει στα αντίστοιχα σημεία να έχουν ίδια καμπυλότητα Gauss. $K = K(E, F, G, \ldots, E_{uu}, \ldots)$

ΠΟΡΙΣΜΑ: Έστω $S, \tilde{S}$ κανονικές επιφάνειες και $\varphi : S \to \tilde{S}$ ισομετρία. Τότε:

$$K(p) = \tilde{K}(\varphi(p))$$



Μεταγενέστερες εξισώσεις Gauss

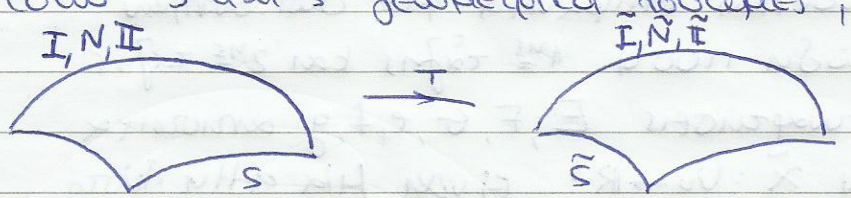
$$\begin{cases} e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2 \\ f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2 \end{cases}$$

Αυτές καλούνται

Εξισώσεις Mainardi-Codazzi

Γεωμετρικώς ισότιμες κανονικές επιφάνειες

Έστω S και $\tilde{S}$ γεωμετρικά ισότιμες, δηλ. $\exists\, T \in Isom(\mathbb{R}^3)$



ώστε $T(S) = \tilde{S}$. $Tp = Ap + p_0$, $A \in O(3)$

$T|_S : S \to \tilde{S}$ διαφορίσιμη

$dT_p = A$. Έχουμε, $I_p(w) = \|w\|^2$ και

$$\tilde{\mathrm{I}}_{T(p)}(dT_p(w)) = \|dT_p(w)\|^2 = \|Aw\|^2 = \|w\|^2$$

Συμπέρασμα: Η $T|_S$ είναι ισομετρία

Σχέση $N, \tilde{N}$: $N = \dfrac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|}$ και $\tilde{N} = \dfrac{\tilde{x}_u \times \tilde{x}_v}{\|\tilde{x}_u \times \tilde{x}_v\|}$ ①

$$\tilde{x} = T \circ x, \quad \tilde{x}_u = A(x_u), \quad \tilde{x}_v = A(x_v)$$

① $\rightsquigarrow$ $\tilde{N} = \dfrac{A(x_u) \times A(x_v)}{\|A(x_u) \times A(x_v)\|} = \pm A \dfrac{(x_u \times x_v)}{\|x_u \times x_v\|} \Rightarrow \tilde{N} = \pm AN$

(Πιο σωστά: $\tilde{N} \circ T = \pm AN$)

$$dN_{T(p)} \circ dT_p = \pm A \circ dN_p \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \tilde{L}_{T(p)}(dT_p(w)) = \pm A(L_p(w))$$

$$\tilde{II}_{T(p)}(dT_p(w)) = <\tilde{L}_{T(p)}(dT_p(w)), dT_p(w)> =$$
$$= \pm <A(L_p w), Aw> = \pm <L_p w, w> \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \tilde{II}_{T(p)}(dT_p(w)) = \pm II_p(w).$$

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ (Bonnet)

Ύπαρξη: Έστω $E, F, G, e, f, g : U \to \mathbb{R}$ λείες με $E>0$, $G>0$, $EG-F^2>0$. Αν πληρούν τις εξισώσεις Gauss Mainardi-Codazzi, τότε $\forall (u_0,v_0) \in U$ θα υπάρχει απεικόνιση $x : U_0 \to \mathbb{R}^3$ όπου $U_0 \subset U$ με $(u_0,v_0) \in U$ ανοιχτό ώστε το σύνολο $x(U)$ να είναι κανονική επιφάνεια με σύστ. συντ/νων x και θεμελιώδη ποσά $1^{ης}$ τάξης και $2^{ης}$ τάξης οι δοσμένες συναρτήσεις E, F, G, e, f, g αντίστοιχα.

Μοναδικότητα: Αν $\tilde{x} : U_0 \to \mathbb{R}^3$ είναι μία άλλη λύση του προβλήματος, τότε υπάρχει $T \in Isom(\mathbb{R}^3)$ τ/ω $\tilde{x} = T \circ x$

Άσκηση:

Υπάρχει επιφάνεια με $E=1$, $F=0$, $G=1$ και $e=1$, $f=0$, $g=1$?

Απ.

Αν υπήρχε τέτοια επιφάνεια θα ήταν ισομετρική με το επίπεδο.

Εκ του έξοχου θεωρήματος του Gauss θα είχε καμπυλότητα Gauss $k=0$

Ενώ

$$k = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} = \frac{-1}{1} = -1$$